Soit n∈ℕ. On notera* $F_n = \{1;...;n\}$

I. Permutations d'un ensemble fini, groupe symétrique.

A. Définitions, premières propriétés.

Def 1: On appelle **permutation** de F_n toute bijection de F_n dans F_n. On notera $\mathbf{S_n}$ l'ensemble de ces permutations.

Prop 1: Card S_n = **n!**

Prop 2: $(S_n, \circ)$ est un groupe, appelé **groupe symétrique**.

B. Transpositions.

Def 2: Pour tout $(i,j)\in F_n^2$ t.q. i<j, on appelle **transposition** échangeant i et j, et on note $\tau_{i,j}$ ou (i,j) la permutation de F_n définie par: $\tau_{i,j}(i) = j$, $\tau_{i,j}(j) = i$, et pout tout $k \in F_n - \{i,j\}$, $\tau_{i,j}(k) = k$.

Exemple: Pour n=5, $\tau_{2,4} = (2,4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

Remarques: S_n contient exactement C_n^2 transpositions.
Toute transposition est involutive. *(dc d'ordre 2 ds S_n).*

Th 1: Les **transpositions** de {1;...;n} **engendrent le groupe S_n**. Autrement dit, toute permutation de {1;...;n} est décomposable en produit de transpositions.

Exemple:
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 3 & 7 & 4 & 8 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$
=(2,8)o(5,7)o(1,6)o(2,5)o(2,3).

C. Cycles.

Def 3: (Gourdon) Si $\sigma\in S_n$ et a∈{1;..;n}, on appelle **orbite** de a suivant σ l'ensemble $O_\sigma(a) = \{\sigma^k(a) / k \in \mathbb{Z}\}$.

Def 4: (Gourdon) Soit $\sigma\in S_n$. On dit que σ est un **cycle** si parmi les $O_\sigma(a)$, $1 \le a \le n$, il n'existe qu'une seule orbite non réduite à un élément. cette orbite est appelée **support** du cycle, son cardinal p la **longueur** du cycle, on dit que σ est un p-cycle, et on note: $\sigma = (a, \sigma(a)..,\sigma^{p-1}(a))$.

Exemple: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ est le 3-cycle (2,5,3).(Mon)

Prop 3: (Gourdon) Deux cycles à support disjoint commutent.

Remarques: L'ordre d'un p-cycle dans Sn est p. (Gou.)
Les 2-cycles sont les transpositions. (Mon.)
L'identité n'est pas un cycle, mais pour le th. suivant, on conviendra qu'elle est décomposable en un produit vide de cycles. (Mon.)

Th 2: Toute permutation de {1;..;n} est décomposable en **produit de cycles à supports disjoints**, et cette décomposition est unique à l'ordre des cycles près.

Exemple: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 6 & 9 & 1 & 5 & 8 & 2 & 7 & 10 & 3 \end{pmatrix}$
= (1,4)o(2,6,8,7)o(3,9,10)

II. Signature d'une permutation (Gou.).

Def 5: Soit $\sigma\in S_n$. On appelle **signature de σ** le produit:
$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1\le i<j\le n} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i} \in \{-1;1\}.$$

Si $\varepsilon(\sigma) = 1$, σ est dite paire. Si $\varepsilon(\sigma) = -1$, σ est dite impaire.

Prop 4: Si t , s ∈ S_n, alors ε(ts) = ε(t).ε(s).

Remarques: Une transposition est de signature -1.
La Prop.4 dit que ε est un mph. de groupes: $S_n \to \{-1;1\}$.
L'ensemble $Ker\varepsilon = A_n = \varepsilon^{-1}(\{1\})$ est un sg distingué de S_n, d'indice 2. On a $Card(A_n) = \frac{n!}{2}$, et A_n s'appelle le **groupe alterné** d'indice n. (ε mph. surjectif).

Prop 5: La signature d'un cycle de longueur p est $(-1)^{p-1}$.

III. Applications.

A. En algèbre linéaire. (Monier p.307 + 309)

Def 6: Soirnt E, F des K-ev, K=ℝ ou ℂ. Soit p∈ℕ*.
Une application **p-linéaire** $\varphi : E^p \to F$ est dite **alternée** ssi pour tout couple (i,j) de $\{1,..p\}^2$ tq. i≠j, et pour tout $(x_1,...,x_p)\in E^p$: $x_i = x_j \Rightarrow \varphi(x_1,...,x_p) = 0$.
Si de plus F=K, on dit que φ est une forme n-linéaire alternée.

Prop 6: Une application p-linéaire $\varphi:E^p\to F$ est **alternée ssi**: $\forall \sigma\in S_p, \forall (x_1,...,x_p)\in E^p$,
$\varphi(x_{\sigma(1)},...,x_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma)\varphi(x_1,...,x_p)$

Conséquence: L'ensemble $\Lambda_n(E)$ des formes n-linéaires alternées sur E est un Kev de dimension 1.
Pour tout base $B = (e_1,...e_n)$ de E, on note $\det_B : E^n \to K$ l'application définie pour tout

$(V_1,...V_n) \in E^n$ par: $\det_B(V_1,...V_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n}$,

où les $a_{i_j,j}$, $i_j \in [\![1,n]\!]$ sont les composantes de V_j ds B.

Pour toute base B de E, ($\det_B$) est une base de $\Lambda_n(E)$.

$\forall \varphi \in \Lambda_n(E), \forall S \in E^n, \forall B$ base de E, $\varphi(S) = \varphi(B).\det_B(S)$.

B. En géométrie. (Mercier p.282 + 304)

Prop 7: Le groupe du triangle équilatéral est isomorphe à S_3.

Prop 8: Le groupe du tétraèdre régulier est isomorphe à S_4.

IV. Notes.

Application principale: Théorie des déterminants.

Historiquement, l'étude du groupe des permutations des racines d'un polynôme par Évariste Galois est à l'origine du concept de groupe.
Un théorème de Cayley(1) assure que tout groupe peut être considéré comme sous-groupe d'un groupe symétrique.

(1)**Th. de Cayley**: Tout groupe fini d'ordre n est isomorphe à un sg de S_n.

Rabe: Pour $n \geq 5$, A_n est simple, i.e. ne possède pas de sg distingué non trivial.

Gourdon ex.6 p.24: Si $n \geq 3$, les **3-cycles engendrent A_n.**

Rapport de jury 2010 *: les exemples d'applications de ces groupes aux déplacements et/ou isométries sont souvent évoqués mais les candidats arrivent rarement à les interpréter ; par ailleurs l'étude du groupe des isométries qui conservent un tétraèdre régulier peut faire l'objet d'un développement intéressant.*

Def 4 (version par Monier): Soit $p \in \mathbb{N}$, $2 \leq p \leq n$. On appelle **p-cycle** de {1;...;n} toute permutation σ de {1;...;n} telle qu'il existe $x_1, \dots, x_p \in \{1;..;n\}$, deux à deux distincts, tels que:

$$\begin{cases} \sigma(x_1) = x_2, \sigma(x_2) = x_3, \dots, \sigma(x_{p-1}) = x_p \\ \forall k \in \{1;\dots;n\} \setminus \{x_1,..,x_p\}, \sigma(x_k) = x_k \end{cases}$$

L'ensemble $\{x_1,..,x_p\}$, unique pour un p-cycle donné, est appelé support de σ, et on note $\sigma = (x_1,..,x_p)$.

$\sigma \in S_n$ est appelée cycle ssi ∃p tq. σ soit un p-cycle.